Numerische Mathematik

Max Mustermann

1. Quadratur

Newton-Cotes Quadratur

Mit äquidistanten Stützstellen: Wir lösen $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ mit Stützstellen $f(x_i)$ und Gewichten w_i. Zudem lohnt es sich mit

```
np.linspace(a,b,N)
```

Zwischenpunkte einzubauen, sodass die Quadratur auf Teilintervallen erfolgen kann.

Verfahren	Ordnung	Formel
Mittelpunktsregel	2	$f(\frac{a+b}{2})(b-a)$
Trapezregel	2	$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$
Simspsonregel	4	$\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

→ **Adaptive Quadratur** Nutze zwei Verfahren verschiedener Ordnung. Falls $||I_1 - I_2|| < tol$ apzeptiere höhere Ordnung, ansonsten Teile Intervall auf und und beginne auf Teilintervallen von vorne.

Monte-Carlo Quadratur

In chaotischen Situationen kann diese probabilistische Methode mit garantierter Konvergenz $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$ eingesetzt werden dabei gilt:

$$s_i = a + (b-a)t_i$$

wobei $t_i \in [0,1]$ Vektoren sind welche zufällig erzeugt wurden.

$$I = \int_a^b z(s)ds = |b-a|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N z(s_i)$$

Vertrauensintervall:

$$\widetilde{\sigma_N} = \sqrt{\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N z(t_i)^2 - (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N z(t_i))^2}{N-1}} = \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}$$

In 68.3% der Fälle liegt der Wert unseres Integrals in

$$[I_N - \widetilde{\sigma_N}, I_N + \widetilde{\sigma_N}]$$

Gauss-Legendre Quadratur

Wir wollen mit n Gewichten und Stützstellen Integrale der Ordnung $2n$ genau berechnen. Mithilfe des Golub Welsch Algorithmus (Skript Seite 167) können wir die Gewichte berechnen. Die Gewichte können wir wie folgt von $[-1,1] \to [a,b]$ umskalieren:

$$\hat{x_i} = \frac{b-a}{2}(x_i+1) + a \;\&\; \hat{w_i} = \frac{b-a}{w_i}$$

Mehrdimensionale Quadratur

```
def trapezoid2d(f, a, b, Nx, c, d, Ny):
    """Approximiert das Doppelintegral.
    """
    # Definiere F(y) = int_a^b f(x,y) dx
    F = lambda y: integrate(lambda x: f(x, y), a, b,
      Nx)
    #integriere wie gewohnt.
    return integrate(F, c, d, Ny)
```

2. Ausgleichsrechnung

Lineare Ausgleichsrechnung

Wir haben hier Probleme bei welchen ein Gleichungsystem $Ax = b$ überbestimmt ist. In A haben wir die Punkte an welchen wir Messwerte sammeln, in x die Variabeln und in b die Resultate der Messung.

Beispiel

Seien $(2,\sqrt{6})$, $(0,-\sqrt{6})$,$(-1,2\sqrt{6})$ Datenpunkte, dann können wir beim Modell $f(x) = \beta_1 x + \beta_2$ Folgendes Ausgleichsproblem kann nun ausgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Wir setzen dabei alle $\beta_2 = 1$ da es ja genau 1 mal im Modell vorkommt.

Lösen des Problems

1. **Normalengleichung**

```
B = np.dot(A.T,A) # calc B=A'*A & y=A'*t
y = np.dot(A.T,b)
x_ng = np.linalg.solve(B,y) # Löse LGS: Bx=y
```

2. **QR-Zerlegung**

```
Q,R_bar = np.linalg.qr(A)
# Bestimme quadratische Matrix R und Vektor c
m,n = np.shape(A)
R = R_bar[:n,:n]
b_tmp = np.dot(Q.T,b)
c = b_tmp[:n];
x_qr = np.linalg.solve(R,c) # Löse GLS: Rx=Q'b
```

3. **(SVD) Singulärwertzerlegung**

```
U,s,V = np.linalg.svd(A)
S = np.zeros_like(A)
S[:2, :2] = np.diag(s)
invS = np.linalg.pinv(S)
x_svd = np.dot(np.dot(np.dot(V,invS),U.T),b)
```

3. Polynominterpolation

1. **Monombasis** Wir stellen folgende Bedingungen an die Parameter:

$$\begin{matrix} c_0 x_0^0 + c_1 x_0^1 \dots c_{m-1} x_0^{m-1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_0 x_{m-1}^0 + c_1 x_{m-1}^1 \dots c_{m-1} x_{m-1}^{m-1} \end{matrix}$$

Dabei werden wir wie folgt vorgehen:

```
x = np.array([x_0, ..., x_m-1])
y = np.array([y_0, ..., y_m-1])
c = np.polyfit(x,y,m) # m ist der Grad
coeffs = coefs[::-1]#da c in Ordnung ..+Ax^2+Bx+C
x_new = np.linspace(a,b,c)
y_fit = np.polyval(coeffs, x_new)
plt.plot(...)
```

Achtung → dieses Verfahren muss bei neuem Stützpunkt komplett neu gerechnet werden.

2. **Lagrange Basis** Wir machen den Ansatz

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j L_j(x)$$

. Dabei gilt $L_j(x) = \prod_{i=0 i\neq j}^{m-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$

3. **Newton Basis** Sei die Newton Basis gegeben durch:

$$\begin{aligned} N_0(x) &= 1 \\ N_1(x) &= (x - x_0) \\ N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ N_n(x) &= \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) \end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom ist gegeben durch:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j N_j(x)$$

Dies Lösen wir durch das aufstellen folgender Gleichung $P(x_i) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j N_j(x_i) \stackrel{!}{=} y_i$ Wir können dabei folgendes Gleichungsystem herleiten, welches wir lösen können:

$$\begin{pmatrix} N_0(x_0) & \dots & N_{m-1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0(x_{m-1}) & \dots & N_{m-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen sind aber ineffizient zu lösen, desshalb benutzt man sogenannte "Dividierte Differenzen. Siehe dafür Seite 114 im Skript.